

LES RENTES VIAGERES : MORTALITE ET REASSURANCE*

Sophie TERRIER
Responsable de l'actuariat à Converium

RESUME

Mots Clés : Rente viagère, longévité, solde technique, réassurance.

La longévité est un risque difficile à appréhender par les compagnies d'assurance car il repose sur des bases en constante évolution.

Or ce risque est présent dans les produits d'assurance telles que les rentes viagères. Il doit donc être évalué le plus précisément possible en tenant compte de son évolution future dans le calcul des primes. En effet, l'assureur s'engage sur un tarif dès le départ.

La réglementation française impose aux assureurs un tarif minimum par l'application de tables de mortalité prospectives construites sur la mortalité de la population féminine française depuis 1993.

A partir de tables d'expérience suisses, nous avons effectué plusieurs simulations afin d'évaluer l'impact d'une surmortalité ou d'une sous-mortalité sur le solde technique d'un assureur utilisant les tables légales en vigueur. Ces simulations mettent en évidence des pertes techniques futures à plus ou moins courte échéance, selon le sexe et l'âge des assurés. Nous avons alors examiné les différentes solutions s'offrant à l'assureur pour y faire face.

De par la réglementation stricte imposée aux assureurs, la réassurance apparaît rapidement comme une des seules solutions possibles. C'est pourquoi nous avons choisi d'approfondir cet aspect en étudiant les différentes couvertures qu'un réassureur peut offrir pour protéger un portefeuille de rentiers. Enfin, nous nous sommes efforcés de mettre en évidence les différents paramètres influant sur le prix de ces couvertures de réassurance et d'analyser clairement les avantages, les inconvénients et les limites de chacune.

SUMMARY

Keywords : life annuity, longevity, technical result, reinsurance

Longevity is a difficult risk to evaluate for insurance companies as it is affected by factors which are constantly evolving.

This risk exists in insurance products such as life annuities and therefore needs to be evaluated in the premium calculations as accurately as possible (allowing for future mortality improvements). The insurer provides a guaranteed premium basis (and therefore a guaranteed minimum annuity).

French regulations stipulate a minimum premium rate (in other words for a given single premium the guaranteed annuity cannot exceed a certain amount). The minimum premium rate is calculated using a specified mortality basis. This specified basis is a prospective

* *Ce travail ayant été réalisé dans le cadre d'un mémoire d'actuariat, il n'implique que son auteur et non l'organisme qui l'emploie*

mortality table (i.e. allowing for future mortality improvements) constructed from a mortality investigation on the french female population from 1993.

Using Swiss insured experience mortality table we have carried out several simulations to measure the impact on the technical result for an insurer that uses the statutory tables to determine premiums. These simulations highlight the size of future technical losses, which vary by age and sex of the annuitant. We then examine the various options open to an insurer to deal with this problem.

Due to the strict regulations imposed on insurers it is no surprise that reinsurance is considered as a solution; we have studied various reinsurance structures. Finally we have highlighted the various parameters that influence the price of reinsurance and analyse the advantages, disadvantages and limits of each reinsurance structure.

INTRODUCTION

Longévité, recul de la mortalité, espérance de vie, voilà des mots bien connus des démographes et des assureurs. Mais lorsqu'ils sont associés à « rente viagère », ils peuvent devenir inquiétants pour ces derniers.

En effet, le risque de longévité est un risque difficile à appréhender car il repose sur des bases en constante évolution ; l'espérance de vie à la naissance ne cesse d'augmenter. Et si cette augmentation a d'abord été due à un recul de la mortalité infantile, depuis ces dernières décennies, c'est le recul de la mortalité du troisième âge qui joue un rôle essentiel dans cette évolution. Or c'est précisément la population âgée qui constitue la clientèle des rentes viagères.

Il faut savoir que lors de la souscription d'un contrat de rentes viagères, la compagnie d'assurance s'engage sur un tarif : les primes sont fixées une fois pour toutes au départ alors que les contrats portent sur des périodes très longues allant jusqu'à vingt ans et plus. Cela nécessite donc de pouvoir évaluer le plus précisément possible la durée de vie des rentiers et de prendre en compte l'évolution future de la mortalité dans le calcul des primes.

En France, c'est chose faite depuis 1993 où l'arrêté du 28 juillet homologue les tables de générations de 1887 à 1993, qui sont des tables de mortalité prospectives obtenues par le prolongement de l'évaluation de la mortalité de la population générale féminine, en prenant pour base les données publiées par l'INSEE entre 1961 et 1987.

Mais ces tables, même si elles sont prospectives, restent des tables de population sans différenciation homme/femme alors qu'au sein de l'Union européenne, la France continue de se distinguer par l'écart le plus grand d'espérance de vie entre les hommes et les femmes, ces dernières ayant toujours la plus grande longévité. Le fait que ces tables aient été construites sur la population féminine a-t-il un effet positif suffisant pour mettre les assureurs à l'abri d'une sous-tarification ? C'est ce que nous allons donc chercher à savoir en utilisant des tables d'expérience suisses nous permettant d'évaluer les différences, si elles existent, qu'il peut y avoir entre une mortalité de rentiers et la mortalité des tables légales. Nous chercherons également à estimer l'intérêt et les conséquences d'utiliser des tables de mortalité d'expérience différenciées par sexe.

En partant de ces tables d'expérience suisses, nous allons ensuite évaluer les conséquences que peut entraîner une surmortalité ou une sous-mortalité sur les résultats techniques d'un assureur. Et en cas de pertes techniques, nous examinerons alors quelles sont les solutions

qui s'offrent à l'assureur pour y faire face en tenant compte du contexte réglementaire fort imposé au secteur de l'assurance.

L'une des solutions étant la réassurance, nous approfondirons cette possibilité en lui consacrant un chapitre. Nous étudierons les différentes couvertures de réassurance possibles pour couvrir un portefeuille de rentiers et nous mettrons en évidence les paramètres ayant une influence importante sur le prix de ces couvertures.

I. TABLES D'EXPERIENCE DE MARCHE

Depuis plus de 100 ans, l'Office Fédéral de Statistiques Suisse étudie la mortalité de la population domiciliée en Suisse et publie des tables de mortalité, la première concernant la période 1876-1880.

Evidemment, l'idéal est de mesurer continuellement la mortalité, sur la base des informations collectées chaque année. Mais la Suisse est un petit pays et les séries de personnes de même âge sont limitées, ce qui fait que les écarts dus à des facteurs accidentels peuvent être importants d'une année à l'autre. Même lorsque l'on considère des périodes de 5 ans, les discontinuités entre deux âges consécutifs peuvent être significatives, des ajustements de la mortalité brute sont alors nécessaires, et des méthodes mathématiques de graduation sont appliquées.

Dans le but de prendre comme base d'observation la meilleure information disponible sur la population Suisse, le Bureau Fédéral des Statistiques prend en compte pour son étude des périodes de 5 ans, centrées sur l'année d'un recensement national. Le recensement national n'étant réalisé que tous les 10 ans, des taux de mortalités non ajustés, par groupes d'âges, sont tout de même publiés tous les ans pour permettre une continuité, même s'il ne s'agit que d'une estimation approximative des tendances.

De son côté, et depuis également très longtemps, l'Union Suisse des Assureurs Vie Privés, à travers son Comité Technique, collecte les données de mortalité de ses compagnies membres, qui représentent plus de 90% du marché. C'est sur la base de ces données que le Comité Technique publie régulièrement des tables de mortalité et met au point des tarifs complets pour les affaires vie collective. Ces tarifs sont alors soumis à l'approbation de l'Autorité de Surveillance pour ensuite être appliqués uniformément sur le marché.

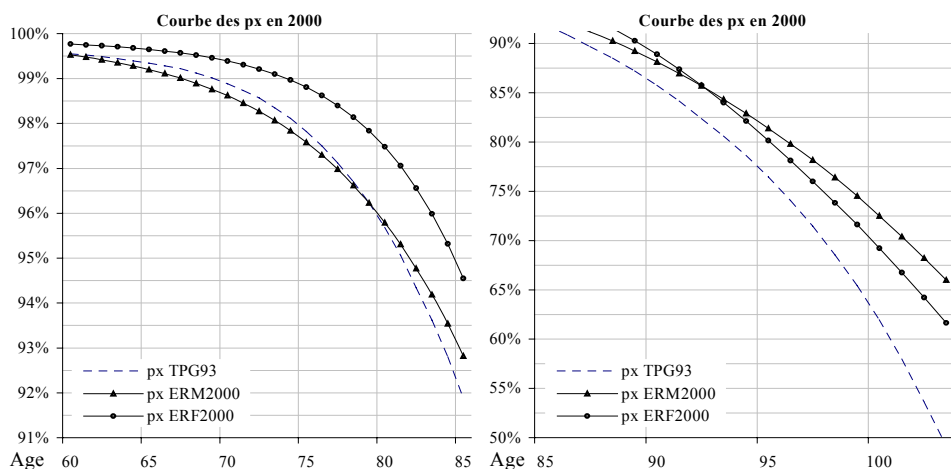
En ce qui concerne les assurances collectives, des études de mortalité différenciées par sexe ont été réalisées séparément pour les assurances en cas de décès (capital décès) et pour les assurances en cas de vie (rentes).

Pour les assurances individuelles, seule la mortalité des rentiers a été étudiée avec également une différenciation par sexe. C'est ainsi que fut établies les tables ERM2000 et ERF2000 qui remplacent les anciennes tables ERM90 et ERF90 qui ne couvrent plus suffisamment l'espérance de vie dont la durée a augmenté.

Ainsi début 1999, après consultation de l'Association Suisse d'Assurances (ASA), l'Office Fédéral des Assurances Privées prévoit que toutes les assurances individuelles de rentes seront tarifées dès le 1^{er} janvier 2001 selon ces nouvelles tables de mortalité par générations de l'ASA, les tables ERM2000 pour les hommes et ERF2000 pour les femmes.

L'approche retenue pour la construction de ces tables prospectives pour les rentes individuelles est de la forme $q_{x,t} = q_{x,t_0} \cdot e^{-\lambda_x(t-t_0)}$.

Ces tables étant des tables d'expérience de marché pour les rentes viagères, ce sont celles que nous avons choisi pour simuler la mortalité des rentiers dans la suite de notre étude. Pour avoir déjà une idée des différences de ces tables entre elles par rapport aux tables françaises TPG93, nous en avons comparé les probabilités de survie à différents âges (l'année de référence choisie étant l'an 2000).



On observe que les probabilités de survie des femmes avec la table ERF2000 sont systématiquement supérieures à celles des tables TPG93, alors que les probabilités de survie des hommes avec la table ERM2000 sont inférieures jusqu'à 79 ans et supérieures à partir de 80 ans à celles des tables TPG93.

On remarquera également que les probabilités de survie des tables ERM2000 et ERF2000 se croisent à l'âge de 93 ans, les probabilités de survie des hommes devenant plus fortes que celles des femmes à partir de cet âge là.

Voyons maintenant l'impact de cette mortalité sur les résultats techniques d'un portefeuille de rentiers pour un assureur.

II. IMPACT DE LA MORTALITE D'EXPERIENCE SUR LE SOLDE TECHNIQUE D'UN ASSUREUR

II.1. Introduction

Rappelons que lors de la souscription d'un contrat de rente viagère immédiate, l'assureur s'engage sur un tarif : les primes sont fixées une fois pour toutes au départ. En échange de ces primes, l'assureur versera une rente à l'assuré jusqu'à son décès. Ces contrats portant sur des périodes très longues, cela nécessite de pouvoir évaluer le plus précisément possible la durée de vie des rentiers.

Pour évaluer le coût d'une rente viagère, l'assureur va donc utiliser une ou plusieurs tables de mortalité (les tables TPG93 en l'occurrence pour la France) pour évaluer la durée de paiement ainsi qu'un taux financier appelé le taux technique pour actualiser les flux futurs.

Comme nous venons de le voir la mortalité des tables d'expérience que nous avons choisies diffère de celle prévue par les tables de générations françaises (TPG93) mises en place en 1993.

Or les tables TPG93 sont obligatoires[†] et servent de base de tarification et de provisionnement des contrats de rente viagère immédiate ou différée souscrits à compter du 01 juillet 1993. Le tarif qu'elles déterminent constitue la limite inférieure des tarifs des contrats de rente. Les entreprises ont cependant la faculté d'utiliser des tables d'expériences si elles sont certifiées par un actuair indépendant de l'entreprise et qu'elles respectent cette limite inférieure.

La législation française impose en outre l'utilisation d'un taux technique maximum[‡] ainsi que la redistribution d'une partie des bénéfices[§] de l'assureur par le biais d'une revalorisation du montant de la rente. Nous reviendrons sur ces éléments par la suite.

Dans un premier temps, nous allons donc chercher à connaître l'impact d'une déviation de mortalité suivant les tables d'expérience pour une compagnie provisionnant ses engagements avec les tables TPG93. Nous essayerons d'évaluer cet impact suivant la composition de son portefeuille et nous examinerons les solutions qui s'offrent à elle en cas de pertes techniques.

Essayons déjà d'avoir un aperçu global des différences de mortalité qui existent entre les tables d'expérience que nous avons choisies et les tables TPG93.

II.2. Comparaison des tables d'expérience ERM/F2000 avec les tables TPG93

II.2.a Comparaison des coûts d'une annuité

Commençons par comparer le coût d'une rente viagère selon la table de mortalité choisie. Ces calculs ont été faits sans chargement ni fractionnement et pour des rentes viagères versées à termes échus.

Coût d'une rente viagère d'1 franc payable à termes échus avec les tables TPG93 en l'an 2000								
Taux technique	Age							
	60	65	70	75	80	85	90	95
0%	26,96	22,00	17,26	12,92	9,20	6,26	4,06	2,48
1%	23,18	19,35	15,52	11,85	8,60	5,94	3,91	2,42
2%	20,14	17,16	14,03	10,92	8,06	5,65	3,76	2,35
3%	17,67	15,33	12,76	10,10	7,57	5,38	3,63	2,29
3,5%	16,60	14,52	12,19	9,73	7,35	5,26	3,56	2,26
4%	15,64	13,78	11,66	9,38	7,14	5,14	3,50	2,23
4,5%	14,76	13,11	11,17	9,05	6,93	5,02	3,44	2,20
4%	13,96	12,48	10,71	8,74	6,74	4,91	3,38	2,17

[†] Voir l'article A335-1 du Code des Assurances.

[‡] Voir les articles A132-1 et A132-1-1 du Code des Assurances.

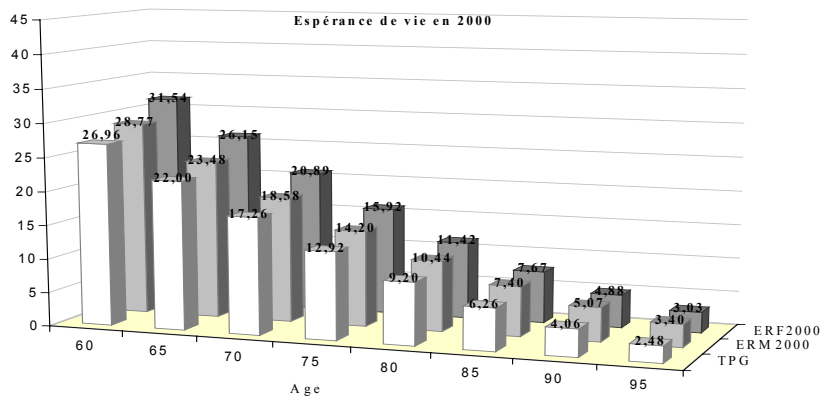
[§] Voir l'article A331-3 du Code des Assurances.

Coût d'une rente viagère d'1 franc payable à termes échus avec la table ERM2000 en l'an 2000								
Taux technique	Age							
	60	65	70	75	80	85	90	95
0%	28,77	23,48	18,58	14,20	10,44	7,40	5,07	3,40
1%	24,42	20,42	16,53	12,89	9,67	6,96	4,84	3,28
2%	21,00	17,92	14,81	11,77	8,98	6,57	4,62	3,17
3%	18,26	15,88	13,35	10,80	8,37	6,21	4,43	3,06
3,5%	17,10	14,99	12,71	10,37	8,10	6,05	4,33	3,01
4%	16,05	14,18	12,12	9,96	7,83	5,89	4,24	2,96
4,5%	15,11	13,44	11,57	9,57	7,58	5,74	4,16	2,91
5%	14,25	12,76	11,06	9,22	7,35	5,59	4,07	2,86

Coût d'une rente viagère d'1 franc payable à termes échus avec la table ERF2000 en l'an 2000								
Taux technique	Age							
	60	65	70	75	80	85	90	95
0%	31,54	26,15	20,89	15,92	11,42	7,67	4,88	3,03
1%	26,64	22,63	18,52	14,43	10,58	7,23	4,67	2,94
2%	22,78	19,77	16,53	13,15	9,83	6,84	4,48	2,84
3%	19,71	17,43	14,85	12,04	9,16	6,48	4,30	2,76
3,5%	18,40	16,41	14,10	11,54	8,85	6,31	4,21	2,72
4%	17,23	15,49	13,42	11,07	8,56	6,15	4,13	2,68
4,5%	16,17	14,64	12,79	10,63	8,29	5,99	4,05	2,64
5%	15,21	13,87	12,20	10,22	8,03	5,84	3,97	2,60

Rien qu'en comparant le coût d'une rente viagère avec les tables TPG93 et les tables d'expérience ERM/F2000, on s'aperçoit déjà des différences importantes existant entre ces tables.

Reprenons dans un graphe la première ligne de ces tableaux qui représente l'espérance de vie aux ages indiqués suivant les différentes tables de mortalité pour l'an 2000.



Il peut paraître choquant en comparant entre elles les espérances de vie obtenues avec les tables ERM/F2000 que la somme âge+espérance diminue parfois avec l'âge, mais il ne faut oublier que ces calculs ont été faits pour l'an 2000 donc sur différentes générations. Si on compare les espérances de vie à différents âges pour une même génération, les résultats sont bien évidemment différents.

II.2.b Evaluation des surcoûts

La sensibilité des provisions mathématiques au changement de table constitue, sans aucun doute, un indicatif significatif. Les tableaux établis ci-dessous indiquent le taux d'augmentation des provisions mathématiques entre les tables ERM/F2000 et les tables TPG93. Comme précédemment, celles-ci ont été calculées sans chargement ni fractionnement et pour des rentes viagères versées à termes échus.

La première ligne du tableau traduit l'augmentation, en pourcentage, des espérances de vie aux âges indiqués pour l'an 2000. Les lignes suivantes montrent l'évolution de ces ratios en fonction du taux technique. L'actualisation atténue le poids apparent des différences entre les termes de rentes les plus éloignés dans le temps. L'écart entre les provisions mathématiques a donc tendance à diminuer à mesure que le taux d'actualisation augmente.

Surcoût induit par la ERM2000 par rapport aux TPG93 en l'an 2000								
Taux technique	Age							
	60	65	70	75	80	85	90	95
0%	6,7%	6,7%	7,7%	9,9%	13,4%	18,2%	24,9%	36,8%
1%	5,4%	5,5%	6,5%	8,8%	12,4%	17,2%	23,9%	35,7%
2%	4,3%	4,5%	5,5%	7,8%	11,4%	16,3%	22,9%	34,7%
3%	3,4%	3,6%	4,7%	6,9%	10,5%	15,4%	22,1%	33,8%
3,5%	3,0%	3,2%	4,3%	6,5%	10,1%	15,0%	21,6%	33,3%
4%	2,6%	2,9%	3,9%	6,2%	9,8%	14,6%	21,2%	32,9%
4,5%	2,3%	2,6%	3,6%	5,8%	9,4%	14,2%	20,8%	32,4%
5%	2,0%	2,3%	3,3%	5,5%	9,1%	13,9%	20,5%	32,0%

Surcoût induit par la ERF2000 par rapport aux TPG93 en l'an 2000								
Taux technique	Age							
	60	65	70	75	80	85	90	95
0%	17,0%	18,8%	21,1%	23,2%	24,1%	22,6%	20,1%	22,1%
1%	14,9%	16,9%	19,4%	21,8%	22,9%	21,7%	19,5%	21,6%
2%	13,1%	15,2%	17,8%	20,4%	21,9%	21,0%	19,0%	21,1%
3%	11,5%	13,7%	16,4%	19,2%	20,9%	20,3%	18,4%	20,6%
3,5%	10,8%	13,0%	15,7%	18,6%	20,4%	19,9%	18,2%	20,3%
4%	10,2%	12,3%	15,1%	18,0%	20,0%	19,6%	18,0%	20,1%
4,5%	9,5%	11,7%	14,5%	17,5%	19,5%	19,3%	17,7%	19,9%
5%	9,0%	11,1%	13,9%	17,0%	19,1%	19,0%	17,5%	19,7%

Ces surcoûts ne sont pas négligeables, en particulier pour les femmes, et représentent un effort important pour un assureur qui voit ses provisions augmenter de la sorte.

En effet, pour un taux technique de 3% et un âge de 60 ans par exemple, le taux d'augmentation des provisions mathématiques entre les tables d'expérience et les tables TPG93 est de 3,4% pour un homme, soit une augmentation du capital constitutif de 0,60 en valeur absolue et de 11,5% pour une femme, soit une augmentation du capital constitutif de 2,04 toujours en valeur absolue.

A titre de comparaison, nous pouvons rappeler que les assureurs français ont déjà été confrontés à ce problème en 1993, lors de la substitution de la table de mortalité TV73-77 par les tables TPG93. Pour rappel, le surcoût induit par les TPG93 par rapport à la TV73-77 pour un taux technique de 3% et un âge de 60 ans était de 16,80% soit une augmentation du capital constitutif de 2,48 en valeur absolue.

II.2.c Coefficients d'équivalence

Les tableaux suivants indiquent le coefficient à appliquer aux q_x (probabilité de décéder) des tables TPG93 pour obtenir le capital constitutif d'une rente viagère payable annuellement à termes échus équivalent à celui obtenu avec les tables ERM/F2000.

Par exemple, en l'an 2000 à l'âge de 65 ans pour un homme et pour un taux technique de 3%, il faudra réduire chaque probabilité de décéder de la TPG93 en les multipliant par 86,8% pour obtenir le même capital constitutif de rente qu'avec la table ERM2000.

Coefficient à appliquer aux TPG93 pour avoir l'équivalence avec la table ERM2000 en l'an 2000								
Taux technique	Age							
	60	65	70	75	80	85	90	95
0%	80,5%	82,9%	83,6%	82,8%	81,1%	79,4%	77,3%	73,9%
1%	81,8%	84,2%	84,6%	83,4%	81,5%	79,6%	77,5%	74,0%
2%	83,3%	85,5%	85,6%	84,1%	81,9%	79,8%	77,7%	74,1%
3%	84,7%	86,8%	86,6%	84,7%	82,3%	80,1%	77,8%	74,3%
3,5%	85,5%	87,5%	87,1%	85,1%	82,5%	80,2%	77,9%	74,3%
4%	86,2%	88,2%	87,6%	85,4%	82,7%	80,3%	78,0%	74,4%
4,5%	87,0%	88,8%	88,1%	85,7%	82,9%	80,4%	78,1%	74,4%
5%	87,8%	89,5%	88,6%	86,0%	83,0%	80,5%	78,1%	74,5%

Coefficient à appliquer aux TPG93 pour avoir l'équivalence avec la table ERF2000 en l'an 2000								
Taux technique	Age							
	60	65	70	75	80	85	90	95
0%	58,2%	59,9%	62,0%	65,0%	69,4%	75,4%	81,0%	82,8%
1%	57,4%	59,2%	61,4%	64,5%	69,0%	75,2%	81,0%	82,9%
2%	56,6%	58,5%	60,8%	64,0%	68,7%	75,0%	81,0%	82,9%
3%	55,8%	57,8%	60,2%	63,5%	68,4%	74,8%	81,0%	83,0%

Coefficient à appliquer aux TPG93 pour avoir l'équivalence avec la table ERF2000 en l'an 2000								
Taux technique	Age							
	60	65	70	75	80	85	90	95
3,5%	55,4%	57,5%	59,9%	63,3%	68,2%	74,8%	80,9%	83,0%
4%	55,1%	57,2%	59,7%	63,0%	68,0%	74,7%	80,9%	83,0%
4,5%	54,7%	56,8%	59,4%	62,8%	67,9%	74,6%	80,9%	83,0%
5%	54,4%	56,5%	59,1%	62,6%	67,7%	74,5%	80,9%	83,1%

Là encore les résultats obtenus avec la mortalité d'expérience des tables ERM/F2000 sont loin des tables TPG93. Pour un taux technique de 3% et un âge de 60 ans, il faudrait réduire les taux de mortalité des tables TPG93 de près d'un quart pour un homme et de presque la moitié pour une femme.

II.2.d Recherche d'un taux technique équivalent

Le chiffrage en termes de taux technique permet de juger des performances financières supplémentaires qu'il faudrait réaliser sur les placements pour pouvoir conserver les tables TPG93 sans préjudice sur les résultats si la mortalité était celle projetée par les tables ERM/F2000. Les barèmes établis dans les tableaux ci-dessous concrétisent l'équivalence mathématique entre les pertes techniques et les bénéfices financiers.

Par exemple, à l'âge de 65 ans pour un homme et pour un taux technique de 3%, le maintien à l'équilibre actuariel dans le temps nécessitera des bénéfices financiers supplémentaires à hauteur de 1,2%. En d'autres termes, si, sur les bases tarifaires des tables TPG93, il fallait réaliser des produits financiers à hauteur de 3%, il faut désormais atteindre 4,2%.

Les écarts de taux équivalents entre les TPG93 et la ERM2000 en l'an 2000								
Taux technique	Age							
	60	65	70	75	80	85	90	95
0%	0,4%	0,5%	0,7%	1,0%	1,8%	3,0%	5,2%	9,7%
1%	0,4%	0,4%	0,6%	1,0%	1,7%	3,0%	5,2%	9,7%
2%	0,3%	0,4%	0,5%	0,9%	1,6%	2,9%	5,1%	9,7%
3%	0,3%	0,3%	0,5%	0,9%	1,6%	2,9%	5,1%	9,7%
3,5%	0,2%	0,3%	0,5%	0,8%	1,6%	2,8%	5,1%	9,7%
4%	0,2%	0,3%	0,4%	0,8%	1,5%	2,8%	5,1%	9,7%
4,5%	0,2%	0,3%	0,4%	0,8%	1,5%	2,8%	5,1%	9,7%
5%	0,2%	0,2%	0,4%	0,8%	1,5%	2,8%	5,1%	9,7%

Les écarts de taux équivalents entre les TPG93 et la ERF2000 en l'an 2000								
Taux technique	Age							
	60	65	70	75	80	85	90	95
0%	1,0%	1,3%	1,7%	2,2%	2,9%	3,6%	4,3%	6,4%
1%	0,9%	1,2%	1,6%	2,2%	2,9%	3,6%	4,4%	6,5%
2%	0,9%	1,2%	1,6%	2,2%	2,9%	3,6%	4,4%	6,5%
3%	0,8%	1,1%	1,6%	2,2%	2,9%	3,6%	4,4%	6,5%

Les écarts de taux équivalents entre les TPG93 et la ERF2000 en l'an 2000								
Taux technique	Age							
	60	65	70	75	80	85	90	95
3,5%	0,8%	1,1%	1,6%	2,2%	2,9%	3,6%	4,4%	6,5%
4%	0,8%	1,1%	1,5%	2,2%	2,9%	3,7%	4,4%	6,5%
4,5%	0,8%	1,1%	1,5%	2,2%	2,9%	3,7%	4,4%	6,5%
5%	0,8%	1,1%	1,5%	2,2%	2,9%	3,7%	4,4%	6,5%

Ces derniers tableaux paraissent moins « effrayants » que les précédents car ils montrent a priori une solution pour combler ces écarts qui semble tout à fait réalisable au moins à certains âges.

Mais ils laissent aussi entrevoir que l'effort de reprovisionnement par des gains financiers supplémentaires est impossible aux âges élevés.

Ces calculs et ces comparaisons nous montrent donc un fort décalage de mortalité entre les tables légales et les tables d'expérience suisses. Quel impact cela va-t-il avoir sur les comptes d'une compagnie d'assurance ?

C'est ce que nous allons essayer de savoir en nous intéressant maintenant à l'impact de la mortalité d'expérience suisse sur le solde technique d'un assureur.

II.3. Compte technique prévisionnel individuel de l'année k

Nous allons, pour avoir une approche simplifiée, calculer le compte technique d'un assuré unique ayant une rente viagère payable annuellement à termes échus.

On notera :

x : âge de l'assuré
 k : année de calcul du compte technique
 R : montant annuel de la rente
 i : taux technique du contrat

$01/01/kV_x$: provision mathématique d'un assuré d'âge x au début de l'année k

$31/12/kV_x$: provision mathématique d'un assuré d'âge x à la fin de l'année k

Le calcul du résultat technique peut se faire selon trois approches différentes. Pour comprendre ces trois approches, prenons les différents postes du compte technique :

Compte technique de l'année k	
Débit	Crédit
$R \cdot {}_{k+1}p_x^{réel}$ Paiement des rentes de l'année k	$01/01/kV_x = R \cdot p_x^{réel} \cdot a_{x+k}$ Provisions mathématiques au début l'année k
$31/12/kV_x = R \cdot {}_{k+1}p_x^{réel} \cdot a_{x+k+1}$ Provisions mathématiques à la fin de l'année k	$01/01/kV_x \cdot i = R \cdot p_x^{réel} \cdot a_{x+k} \cdot i$ Intérêts techniques

1^{ère} approche

En théorie, si la mortalité est celle des tables de mortalité utilisées, la somme des postes au crédit du compte technique doit être égale à la somme des postes au débit du compte technique.

Les provisions mathématiques de début d'année augmentées des intérêts techniques de l'année doivent permettre à faire face aux paiements des rentes de l'année et à la constitution des provisions mathématiques de fin d'année ; il faut donc que :

$$\underbrace{R \cdot {}_k P_x^{\text{réel}} \cdot a_{x+k} \cdot (1+i)}_{\text{Crédit}} = \underbrace{R \cdot {}_k P_x^{\text{réel}} \cdot p_{x+k}^{\text{théorique}} \cdot (a_{x+k+1} + 1)}_{\text{Débit}} .$$

L'espérance du solde technique est donc :

$$E(ST_{31/12/k}) = R \cdot \left({}_k P_x^{\text{réel}} \cdot a_{x+k} \cdot (1+i) - {}_{k+1} P_x^{\text{réel}} \cdot (a_{x+k+1} + 1) \right) .$$

2^{ème} approche

On peut aussi exprimer a_x comme $a_x = p_x^{\text{théorique}} \cdot (1+i)^{-1} \cdot (a_{x+1} + 1)$.

On obtient alors $R \cdot {}_k P_x^{\text{réel}} \cdot \left(p_{x+k}^{\text{théorique}} - p_{x+k}^{\text{réel}} \right) \cdot (a_{x+k+1} + 1) = 0$.

Ceci nous permet de ne plus s'intéresser qu'à la somme des postes au débit du compte technique. On évalue au début de l'année la valeur attendue des rentes à payer dans l'année et la valeur attendue des provisions à constituer en fin d'année. Ces calculs se font donc par rapport à un stock de vivants attendus.

En théorie, on doit donc avoir :

$$\underbrace{{}_k P_x^{\text{réel}} \cdot p_{x+k}^{\text{théorique}} \cdot (a_{x+k+1} + 1) \cdot R}_{\text{Valeur attendue}} = \underbrace{{}_k P_x^{\text{réel}} \cdot p_{x+k}^{\text{réel}} \cdot (a_{x+k+1} + 1) \cdot R}_{\text{Valeur réelle}} .$$

L'espérance du solde technique est donc :

$$E(ST_{31/12/k}) = {}_k P_x^{\text{réel}} \cdot \left(p_{x+k}^{\text{théorique}} - p_{x+k}^{\text{réel}} \right) \cdot (a_{x+k+1} + 1) \cdot R .$$

Cette approche nous montre que l'espérance du solde technique est en fait composée par la somme de deux espérances : l'espérance d'un différentiel de provisions mathématiques à constituer en fin d'année et celle d'un différentiel d'arrages à payer dans l'année.

3^{ème} approche

Comme pour la 2^{ème} approche, on ne s'intéresse plus qu'à la somme des postes au débit du compte technique. Mais cette fois-ci, on évalue au début de l'année la valeur attendue des rentes qui ne seront plus à payer dans l'année et la valeur attendue des libérations de provisions en fin d'année. Ces calculs se font donc par rapport à un stock de décès attendus.

En théorie, on doit donc avoir :

$$\underbrace{{}_k p_x^{\text{réel}} \cdot p_{x+k}^{\text{théorique}} \cdot (a_{x+k+1} + 1) \cdot R}_{\text{Valeur attendue}} = \underbrace{{}_k p_x^{\text{réel}} \cdot p_{x+k}^{\text{réel}} \cdot (a_{x+k+1} + 1) \cdot R}_{\text{Valeur réelle}} .$$

L'espérance du solde technique est donc :

$$E(ST_{31/12/k}) = {}_k p_x^{\text{réel}} \cdot (q_{x+k}^{\text{réel}} - q_{x+k}^{\text{théorique}}) \cdot (a_{x+k+1} + 1) \cdot R .$$

On retrouve également par cette approche, l'espérance d'un différentiel de provisions mathématiques à constituer en fin d'année et celle d'un différentiel d'arrrages à payer dans l'année.

Si ces trois approches sont strictement équivalentes, pour des raisons pratiques de calculs ou de données disponibles mais également pour des raisons informatiques, l'une ou l'autre de ces trois méthodes sera plus facilement applicable.

Nous remarquerons également que les deux dernières méthodes ont l'intérêt de ne plus faire intervenir l'évaluation des intérêts techniques, ce qui, en pratique, simplifie très largement les calculs.

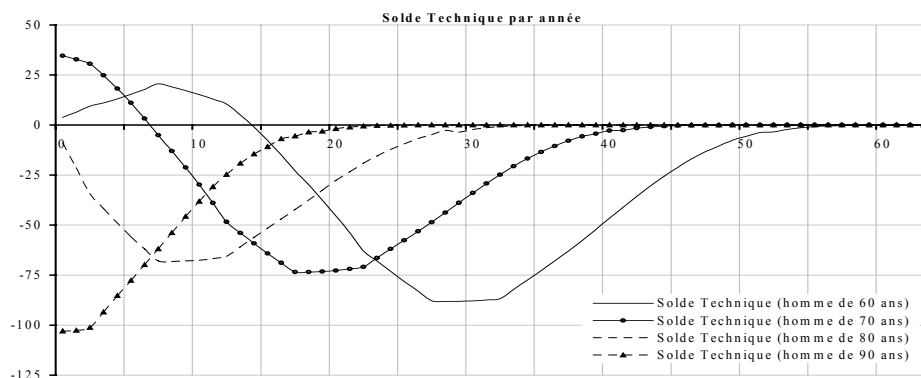
II.4. Simulation du solde technique d'un assureur avec les tables d'expérience

Pour évaluer l'impact que la mortalité des tables d'expérience suisses ERM/F2000 pourrait avoir sur le solde technique d'un portefeuille, nous allons effectuer des simulations sur des comptes individuels afin d'examiner l'impact de l'âge et du sexe des assurés.

II.4.a Simulation sur un compte individuel

Nous avons fait plusieurs simulations sur différents profils d'âges.

Pour chaque simulation nous avons pris comme base que chaque assuré reçoit une rente de 1000 € payable annuellement à termes échus, les calculs étant faits avec un taux technique de 3%.



Ces courbes nous montrent l'évolution du solde technique pour un homme à différents âges. Pour chaque âge, il a tendance à décroître fortement puis à croître à la fin.

Pour tous les âges inférieurs à 80 ans, le solde technique commence par être positif pour devenir négatif. Cela peut paraître surprenant puisque les calculs faits plus tôt nous indiquaient un surcoût induit par la table ERM2000 par rapport aux tables TPG93

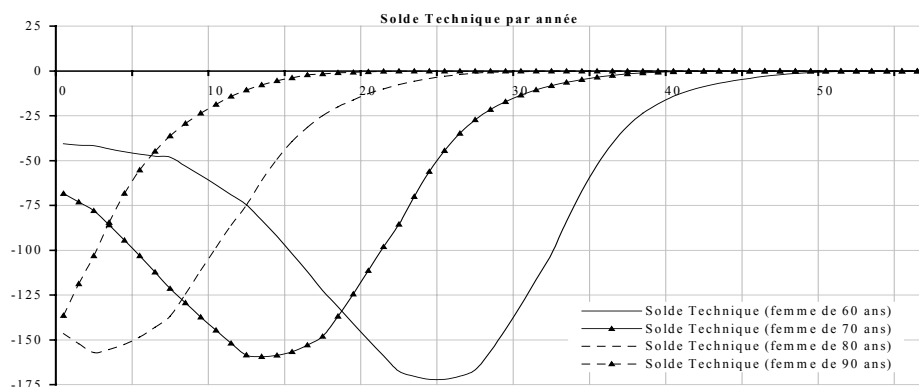
important et positif. Pour un homme de 60 ans par exemple, le surcoût induit par la table ERM2000 par rapport aux tables TPG93 en l'an 2000 était de 3,4% (pour un taux technique de 3%).

Mais le surcoût peut être considéré comme la différence entre la valeur actuelle des soldes techniques positifs et la valeur actuelle des soldes techniques négatifs.

Alors qu'un solde technique annuel peut être considéré, en simplifiant, comme la différence entre deux probabilités de survie, celle des tables TPG93 et des tables ERM2000. Or, les probabilités de survie selon les tables ERM2000 sont inférieures à celles des tables TPG93 jusqu'à 80 ans environ selon les générations et deviennent supérieures ensuite.

L'utilisation des tables ERM2000 projette donc pour les hommes une sous-mortalité par rapport aux tables TPG93 pendant un certain nombre d'années sans pour autant que la valeur actuelle des soldes techniques positifs suffisent à compenser la valeur actuelle des soldes techniques négatifs.

Les simulations faites sur les femmes donnent les résultats suivants :



Ces courbes nous montrent l'évolution du solde technique pour une femme à différents âges. Comme pour les hommes, pour chaque âge, il a tendance à décroître fortement puis à croître à la fin. Par contre, il n'y a cette fois aucun solde technique positif à aucun âge. Nous vérifions bien là que les tables ERM2000 projette systématiquement une sous-mortalité par rapport aux tables TPG93 comme nous l'avons déjà observé auparavant.

Cherchons maintenant ce que peut faire un assureur face à ces pertes techniques futures ?

Comme nous l'avons vu auparavant, une des solutions possibles qui apparaît, pourrait être de compenser les pertes techniques par des gains financiers.

C'est ce que nous allons chercher à mesurer.

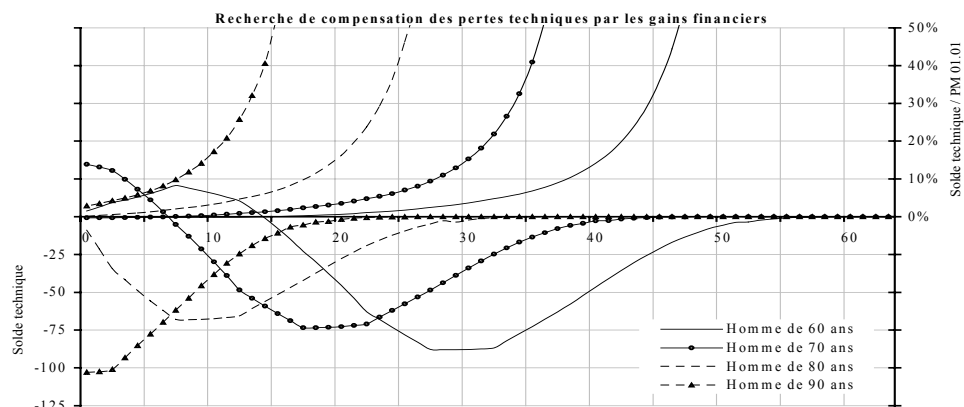
II.5. Recherche de compensation des pertes techniques par les gains financiers

Comme pour l'étude de l'impact de la mortalité d'expérience, nous allons effectuer des simulations sur un compte individuel.

Pour connaître les performances financières supplémentaires nécessaires pour faire face aux pertes, il suffit de rapporter chaque année le solde technique au montant des provisions mathématiques de l'année.

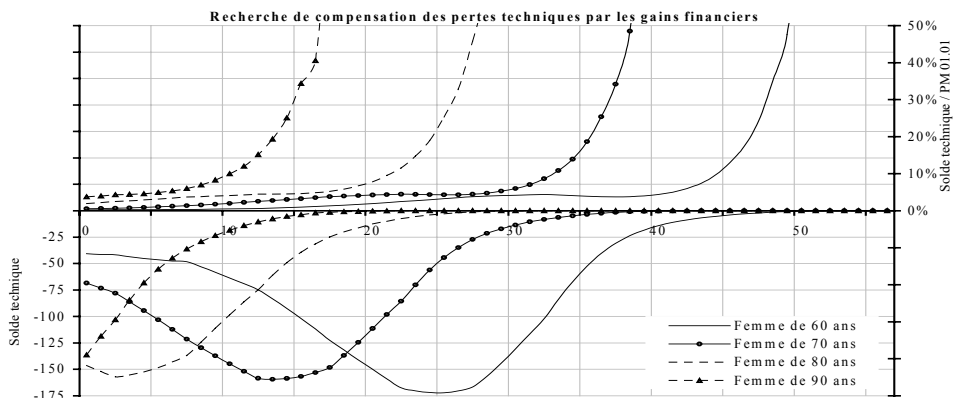
II.5.a Simulation sur un compte individuel

Reprenons les simulations du solde technique pour les hommes à différents âges en y ajoutant le calcul du rapport entre le solde technique et les provisions mathématiques de chaque année.



$\frac{-\text{Solde technique}_k}{\text{Provisions mathématiques}_k}$ pour les hommes				
Age				
Année	60	70	80	90
0	-0,02%	-0,27%	0,12%	2,84%
1	-0,04%	-0,27%	0,31%	3,47%
2	-0,06%	-0,27%	0,56%	4,25%
3	-0,07%	-0,23%	0,76%	4,94%
4	-0,08%	-0,18%	1,00%	5,77%
5	-0,10%	-0,12%	1,29%	6,84%
6	-0,12%	-0,04%	1,64%	8,17%
7	-0,15%	0,06%	2,06%	9,81%
8	-0,14%	0,17%	2,40%	11,80%
9	-0,13%	0,30%	2,80%	14,16%
10	-0,12%	0,46%	3,30%	17,21%
15	0,08%	1,61%	7,05%	53,42%
20	0,66%	3,54%	16,25%	-
25	1,78%	7,02%	46,31%	-
30	3,62%	15,28%	-	-
35	6,82%	40,91%	-	-
40	14,14%	231,33%	-	-

Si pour les hommes, jusqu'à certains âges et pour les premières années, des gains financiers supplémentaires ne sont pas nécessaires puisqu'il y a des gains techniques, avec le temps les pertes techniques augmentant et les provisions mathématiques diminuant, ces gains financiers deviennent non seulement indispensables mais aussi irréalisables. De même, reprenons les simulations faites pour les femmes à différents âges en y ajoutant le rapport entre le solde technique et les provisions mathématiques de chaque année.



$\frac{-\text{Solde technique}_k}{\text{Provisions mathématiques}_k}$ pour les femmes				
Age				
Année	60	70	80	90
0	0,23%	0,54%	1,93%	3,76%
1	0,24%	0,60%	2,18%	3,98%
2	0,25%	0,67%	2,46%	4,27%
3	0,27%	0,77%	2,67%	4,41%
4	0,28%	0,89%	2,89%	4,58%
5	0,30%	1,03%	3,14%	4,88%
6	0,32%	1,19%	3,39%	5,35%
7	0,33%	1,36%	3,67%	6,00%
8	0,38%	1,55%	3,81%	6,95%
9	0,43%	1,75%	3,95%	8,27%
10	0,49%	1,98%	4,09%	9,99%
15	0,98%	3,26%	4,62%	34,39%
20	1,93%	4,22%	7,81%	-
25	3,23%	4,30%	25,34%	-
30	4,20%	6,03%	-	-
35	3,94%	18,68%	-	-
40	4,38%	147,68%	-	-

Pour les femmes, des performances financières supplémentaires sont nécessaires dès le départ puisqu'il y a des pertes techniques mais sont généralement tout à fait réalisables les premières années. Mais comme pour les hommes, elles augmentent chaque année et deviennent irréalises avec le temps.

Rappelons que les calculs ayant été faits avec un taux technique de 3%, les produits financiers sont à réaliser à hauteur du taux technique augmenté des performances financières supplémentaires indiquées.

Conclusion

On voit bien par ces simulations que si l'assureur peut compenser ses pertes techniques par ses gains financiers un certain nombre d'années, il ne le peut pas jusqu'à l'extinction de son portefeuille.

Pour compenser de façon significative ses pertes techniques futures, il faudrait donc que l'assureur conserve chaque année ses gains techniques et ses gains financiers. Et c'est d'ailleurs ce que nous avons déjà vu par le calcul du taux technique équivalent qui nous indiquait des performances financières supplémentaires tout à fait réalisables pour certains âges.

Mais un autre élément va intervenir et rendre la compensation des pertes techniques futures par les bénéfices financiers impossible : la participation bénéficiaire.

En effet, la réglementation des assurances impose la distribution d'une participation aux bénéfices**.

Pour chaque entreprise, le montant minimum de la participation aux bénéfices à attribuer au titre d'un exercice est déterminé globalement à partir d'un compte de participation aux bénéfices.

Ce compte comporte au minimum 90% du solde du compte technique de l'année ou 100% s'il est négatif + 85% du solde du compte financier de l'année + le solde de réassurance cédée + s'il y a lieu, le solde débiteur du compte de participation aux résultats de l'exercice précédent.

De façon simplifiée, le compte technique est composée des primes + Provisions mathématiques de début d'année - Sinistres - Provisions mathématiques de fin d'année + intérêts techniques de l'année.

Le compte financier est représenté par les produits financiers calculés comme le produit du taux de rendement des placements de l'entreprise par le montant moyen en cours d'exercice des provisions techniques brutes de cessions en réassurance – intérêts techniques de l'année.

Enfin, le montant de la participation aux bénéfices peut-être affecté directement aux provisions mathématiques ou porté, partiellement ou totalement, à la provision pour participation aux excédents††. Les sommes portées à cette dernière provision sont affectées à la provision mathématique ou versées aux souscripteurs au cours des huit exercices suivant celui au titre duquel elles ont été portées à la provision pour participation aux excédents. Le fait de porter le montant de la participation aux résultats à la provision pour participation aux excédents permet donc de différer une revalorisation d'au plus huit ans. Cela permet également un lissage du taux de revalorisation mais n'offre pas la possibilité d'un lissage des pertes puisque toute somme portée à la provision pour participation aux excédents est acquise aux assurés et devra leur être redistribuée.

** Voir les articles A331-3 à A331-8 du Code des Assurances.

†† Voir l'article A331-9 du Code des Assurances.

Cette participation aux bénéficiaires va permettre de revaloriser les montants de rente mais du même coup va significativement réduire la possibilité à l'assureur de se constituer un « matelas » pour faire face aux pertes techniques futures et va même accroître celles-ci. En effet, la revalorisation engendre un effet de levier important sur le montant des pertes techniques dès lors qu'il y a sous-mortalité par rapport aux tables de mortalité utilisées (l'effet inverse étant bien évidemment observé en cas surmortalité).

On pourrait alors conseiller aux assureurs d'augmenter leurs taux techniques afin d'offrir un montant de rente plus élevé et d'éviter ainsi cet effet de levier. Mais la législation française impose aux assureurs un taux technique maximum^{‡‡} de 60% du TME^{§§} sans pouvoir dépasser 3.5%.

Bien sûr, ce choix du législateur a été fait dans un but précis : celui d'une augmentation du montant de la rente au cours du temps afin d'éviter sa dévaluation face à l'inflation. En effet, un taux technique élevé implique un montant de rente plus élevé au départ mais fixe pour toute la durée du contrat.

Ce choix n'a d'ailleurs pas été fait qu'en France, puisque la Suisse, la Belgique, l'Allemagne, l'Espagne et l'Italie entre autres, ont également fait ce choix d'un taux technique maximum et d'une revalorisation obligatoire.

Mais signalons tout de même certains pays comme le Royaume-Uni où le législateur laisse l'assureur libre aussi bien sur le choix de ses tables de mortalité que sur le choix du taux technique, les contrats les plus répandus étant ceux offrant une rente fixe avec un taux technique très attractif. Depuis peu, une loi sur les fonds de pension prévoit même une indexation obligatoire des montants de rente sur l'inflation. Mais cela nécessite bien sûr une gestion actif-passif extrêmement pointue.

Signalons également qu'outre le fait qu'aujourd'hui, pour les contrats de rente, pratiquement tous les pays d'Europe ont opté pour des tables de mortalité prospectives par générations différenciées selon le sexe, certains pays comme la Suisse, la Belgique ou le Royaume-Uni, pour ne citer qu'eux, ont choisi de partager l'expérience de mortalité de leurs portefeuilles afin de pouvoir construire de tables d'expérience de marché et de suivre de près l'évolution de la mortalité.

Le Royaume-Uni, encore, publie chaque année ces données^{***} et étudie régulièrement la validité de ses tables de mortalité. Tables nombreuses, puisqu'on trouve, pour les rentes, des tables différentes non seulement par sexe mais également selon le type de souscription (obligatoire ou facultatif) et par niveau de rente.

Cette parenthèse faite, revenons à la compagnie d'assurance française qui semble donc totalement impuissante devant une déviation de mortalité sur son portefeuille de rentiers puisqu'elle ne peut compenser ses pertes techniques ni par ses gains techniques éventuels des premières années, ni par ses gains financiers. Et qui, par le biais de la

‡‡ Voir l'article A132-1 du Code des Assurances.

§§ TME : taux moyen des emprunts de l'Etat français.

*** L'Institut des Actuaire (Institute of Actuaries) et la Faculté des Actuaire (Faculty of Actuaries) publie régulièrement ces résultats dans les bulletins CMIR (Continuous Mortality Investigation Reports)

revalorisation rendue quasi obligatoire par la participation aux résultats, voit ses pertes futures augmentées de façon non négligeable.

Il reste alors à un assureur deux solutions : soit construire sa propre table d'expérience, soit faire appel à la réassurance.

Pour un assureur, construire sa propre table d'expérience nécessite d'avoir un portefeuille de rentiers de taille suffisante et d'avoir un recul suffisamment important pour pouvoir exploiter ses données.

Ceci est donc impossible pour les assureurs dont cette activité est marginale ou qui souhaite se lancer sur ce produit.

Nous allons donc maintenant voir quelles solutions peut apporter la réassurance.

III. LA REASSURANCE

III.1. Introduction

Comme nous venons de le voir le risque de longévité est un risque important pour une compagnie d'assurance et les moyens dont elle dispose pour y faire face elle-même sont très limités.

Mais ce n'est pas le seul risque relatif au risque viager, en effet une compagnie peut également devoir faire face au risque d'une mutualisation impossible du fait de la petite taille de son portefeuille (risque intrinsèque), et ceci, même s'il n'y a pas de déviation de mortalité.

Pour faire face à ces risques une des solutions possibles pour une compagnie d'assurance est de faire appel à la réassurance.

L'étude présente ne portant que sur le risque technique, nous n'aborderons les couvertures de réassurance que d'un point de vue technique en supposant (ce qui est souvent le cas en réalité) que la compagnie d'assurance continuera à gérer et à assumer le risque financier elle-même.

Avant de commencer à étudier les diverses formes que peut prendre la réassurance, il est bon de rappeler l'impact que la réassurance peut avoir sur les comptes de l'assureur et notamment sur son compte de participation aux résultats.

III.2. Impact de la réassurance

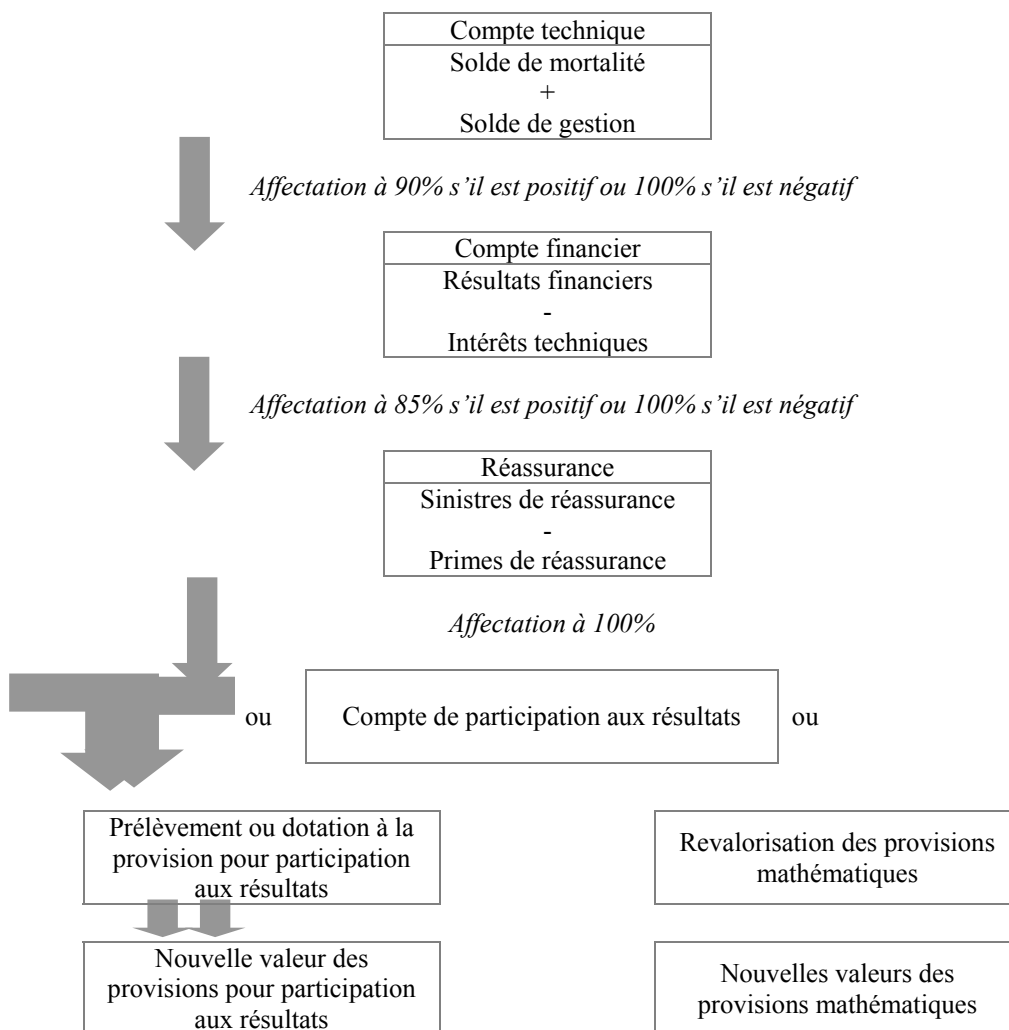
Nous avons vu précédemment que la réglementation des assurances impose la distribution d'une participation aux bénéfices.

Il est prévu, dans le compte de participation aux résultats, une rubrique intitulée « solde de réassurance cédée »^{†††}.

Seule est prise en compte la réassurance de risque et le solde de réassurance cédée est égal à la différence entre le montant des sinistres à la charge des cessionnaires et celui des primes cédées. Il est inscrit, selon le cas, au débit ou au crédit du compte de participation aux résultats.

Schématisons le calcul du compte de participation aux résultats :

^{†††} Voir l'article A331-8 du Code des Assurances.



Nous avons vu également que l'assureur ne peut pas se constituer de « matelas » pour faire face à ses pertes futures puisqu'il doit affecter la majeure partie de son solde technique et financier au compte de participation.

Par contre, le solde de réassurance peut l'y aider.

En effet, il suffirait que le montant des sinistres de réassurance soit égal au solde technique afin d'annuler celui-ci et que les primes de réassurance soient alors financées par une partie du compte financier. L'assureur ne redistribuerait alors que le surplus « réel » de ses résultats.

Et ainsi, ce n'est plus l'assureur mais le réassureur qui constituerait les réserves nécessaires pour faire face aux pertes futures.

Bien évidemment cela suppose un transfert de risque. C'est ce que nous allons étudier maintenant par les différentes couvertures de risque que peut offrir un réassureur.

III.3. Couverture du solde technique par un Stop Loss

III.3.a Principe de la couverture

La couverture Stop Loss (appelée aussi excédent de perte) est une couverture de réassurance non-proportionnelle. Le principe de cette couverture est de protéger le montant global de la sinistralité lorsqu'elle dépasse le seuil financier (franchise) au-delà duquel l'assureur souhaite être protégé. La franchise est généralement exprimée annuellement et l'engagement du réassureur sera limité à un montant maximum appelé la portée.

Pour une couverture Stop Loss, la franchise et la portée sont couramment exprimées en pourcentage du rapport sinistres à primes.

Dans le cas de rentes viagères, le but étant la prise en charge par le réassureur du surplus d'arrérages payés dans l'année et du surplus de provisions mathématiques à constituer en fin d'année (c'est à dire la prise en charge du solde technique lorsqu'il est négatif), il sera préférable pour l'assureur d'avoir une couverture pluriannuelle ou même une couverture allant jusqu'à l'extinction de son portefeuille. Mais cela suppose alors que la couverture de réassurance intervienne sur un portefeuille fermé.

Pour une couverture pluriannuelle en Stop Loss sur un portefeuille de rentes viagères en cours de service fermé, le réassureur peut proposer en fait deux solutions :

- soit de payer tout ou une partie du solde technique s'il est négatif et de récupérer tout ou une partie du solde technique s'il est positif,
- soit uniquement de payer tout ou une partie du solde technique s'il est négatif.

Le réassureur pourra limiter son engagement de façon annuelle ou au global pour toute la durée de la couverture, mais il pourra aussi choisir d'offrir une couverture dite « illimitée », c'est à dire sans engagement maximum défini.

La 1^{ère} possibilité de couverture étant la plus avantageuse et la plus logique dans une optique de lissage des pertes pour un assureur, nous la garderons pour toute la suite de cette étude et nous nous placerons dans le cas de figure d'une couverture illimitée.

Le réassureur va donc devoir évaluer au mieux les soldes techniques des différentes années jusqu'à extinction du portefeuille.

Pour cela, le réassureur choisira une des trois approches de calcul du solde technique vues précédemment.

Bien entendu, quelle que soit l'approche choisie les résultats seront strictement les mêmes. Néanmoins, certaines approches, notamment la 2^{ème} et la 3^{ème} approche, sont en pratique plus simples à mettre en place et plus fiables en termes d'erreurs de calculs possibles. En effet, ces deux approches ont l'avantage de ne pas faire intervenir l'évaluation des intérêts techniques qui peut se révéler délicat en particulier en cas de paiement fractionné des rentes.

De même, quelle que soit l'approche choisie pour les calculs, une des approches devra également être choisie pour la rédaction et l'application du traité de réassurance.

III.3.b Evaluation des soldes techniques

Nous choisirons une des 3 approches que nous avons vues auparavant pour estimer le solde technique des différentes années.

Nous utiliserons les mêmes notations et nous indiquerons par (R) les bases techniques de réassurance et par (A) les bases techniques d'assurance.

Si nous ne tenons pas compte de la revalorisation, en choisissant la deuxième approche, nous aurons:

$$\text{Solde technique}_k = \sum_{n=1}^N k P_{x_n}^{(R)} \cdot \left(P_{x_n+k}^{(A)} - P_{x_n+k}^{(R)} \right) \cdot \left({}_{k+1}V_n^{(A)} + R_n \right).$$

III.3.c Calcul du prix de la couverture

Une fois le calcul des soldes techniques fait, il faut déterminer le prix de la réassurance. Une des façons les plus simples d'exprimer la prime de réassurance est de l'exprimer en fonction des provisions mathématiques (de début d'année par exemple).

Il faut donc évaluer un taux tel que la prime obtenue par l'application de ce taux aux provisions mathématiques corresponde à la charge de sinistres à laquelle devra faire face le réassureur chaque année, c'est à dire tel que le réassureur puisse faire face à la part des éventuels soldes techniques négatifs qu'il aura à payer.

Les soldes techniques de chaque année tels que nous venons de les exprimer étant uniquement des estimations de flux comptables, il faut les actualiser au taux de placement que le réassureur peut espérer pour toute la durée du contrat.

Nous supposons que la prime de réassurance est payée en début d'année par rapport aux provisions mathématiques à cette date et que le paiement de la charge de sinistre se fera en fin d'année. Cette hypothèse est d'importance car elle met en jeu des actualisations de flux non négligeables.

Nous noterons β le taux de prime pure annuel de réassurance, j le taux de placement du réassureur que, par simplification, nous supposons fixe sur toute la durée de la couverture, et λ la part des soldes techniques prise en charge par le réassureur.

$$\text{Nous aurons donc : } \beta = \frac{\sum_{k=0}^{\omega} -\lambda \cdot \text{solde technique}_k \cdot (1+j)^{-(k+1)}}{\sum_{k=0}^{\omega} PM_{01/01/k} \cdot (1+j)^{-k}}.$$

Pour cette couverture l'assureur paiera donc une prime égale à β des provisions mathématiques et le paiement du solde technique positif se fera sous la forme d'une prime additionnelle de réassurance.

Il faut ensuite actualiser tous ces flux pour obtenir les taux purs de réassurance.

Le taux d'actualisation choisi par le réassureur (et qui représente son taux de placement envisagé pour toute la durée de la couverture) a une influence importante sur les calculs. En effet, l'actualisation atténue le poids des flux négatifs les plus éloignés dans le temps et ce d'autant plus que le taux de rendement est fort. C'est pourquoi les calculs seront faits suivant plusieurs scénarios de taux de rendement j .

Bien sûr, plus le réassureur prendra un taux de rendement élevé moins son tarif sera cher, mais vu la durée probable de la couverture, il prend un risque financier non

négligeable. Il sera donc grandement recommandé pour le réassureur d'avoir une gestion financière pointue sur ces contrats même si celle-ci sera probablement rendue difficile de par sa durée et son incertitude sur les flux probables.

Pour s'en donner une meilleure idée voyons le coût de la couverture par âges.

	Couverture Stop Loss							
	Prime annuelle pure β				Prime unique pure Π			
	$j=3\%$	$j=4\%$	$j=5\%$	$j=6\%$	$j=3\%$	$j=4\%$	$j=5\%$	$j=6\%$
Homme 60 ans	0,26%	0,20%	0,15%	0,11%	3,4%	2,4%	1,7%	1,2%
Homme 70 ans	0,48%	0,41%	0,34%	0,28%	4,7%	3,7%	2,9%	2,2%
Homme 80 ans	1,60%	1,50%	1,41%	1,33%	10,5%	9,5%	8,5%	7,7%
Homme 90 ans	5,32%	5,17%	5,03%	4,89%	22,1%	20,9%	19,8%	18,8%
Femme 60 ans	0,84%	0,76%	0,70%	0,64%	11,5%	9,6%	8,0%	6,8%
Femme 70 ans	1,58%	1,50%	1,42%	1,35%	16,4%	14,5%	12,9%	11,6%
Femme 80 ans	2,95%	2,88%	2,82%	2,76%	20,9%	19,5%	18,3%	17,2%
Femme 90 ans	4,48%	4,41%	4,33%	4,26%	18,4%	17,7%	17,0%	16,3%

	Différence par rapport à un taux de rendement à 3%					
	β			Π		
	$j=4\%$	$j=5\%$	$j=6\%$	$j=4\%$	$j=5\%$	$j=6\%$
Homme 60 ans	-23%	-41%	-56%	-29%	-51%	-66%
Homme 70 ans	-16%	-30%	-43%	-21%	-39%	-52%
Homme 80 ans	-6%	-12%	-17%	-10%	-19%	-27%
Homme 90 ans	-3%	-6%	-8%	-5%	-10%	-15%
Femme 60 ans	-9%	-17%	-24%	-17%	-31%	-41%
Femme 70 ans	-5%	-10%	-14%	-11%	-21%	-29%
Femme 80 ans	-2%	-4%	-6%	-7%	-12%	-18%
Femme 90 ans	-2%	-3%	-5%	-4%	-8%	-12%

La différence de prix par âge et par sexe est flagrante, on peut donc conclure que mis à part l'impact du taux de rendement, la composition du portefeuille influe énormément sur le prix de la couverture de réassurance.

En effet, la sous-mortalité par rapport aux tables TPG93 étant observée pour les hommes âgés de plus de 80 ans et pour les femmes, plus un assureur aura un portefeuille jeune et de population majoritairement masculine, moins sa couverture sera chère.

III.3.d Impact de la réversion

Comme nous venons de le voir la composition du portefeuille a un impact important sur la cotation du réassureur. Or dans de nombreux contrats une rente de réversion sur le conjoint est prévue. Le conjoint étant généralement du sexe opposé, la réversion risque de féminiser un portefeuille majoritairement masculin et inversement et donc d'influer sur le prix de la couverture de réassurance.

C'est ce que nous allons maintenant étudier en supposant une réversion sur le conjoint de 60%. Pour des raisons de simplification de calcul, nous supposons également que les hommes et les femmes ont un conjoint du même âge. On obtient alors les résultats suivants :

	Stop Loss – Prime annuelle pure β							
	Sans réversion (1)				Avec réversion à 60% (2)			
	$j=3\%$	$j=4\%$	$j=5\%$	$j=6\%$	$j=3\%$	$j=4\%$	$j=5\%$	$j=6\%$
Homme 60 ans	0,26%	0,20%	0,15%	0,11%	0,67%	0,58%	0,51%	0,44%
Homme 70 ans	0,48%	0,41%	0,34%	0,28%	1,22%	1,12%	1,03%	0,94%
Homme 80 ans	1,60%	1,50%	1,41%	1,33%	2,71%	2,61%	2,51%	2,42%
Homme 90 ans	5,32%	5,17%	5,03%	4,89%	5,70%	5,58%	5,46%	5,35%
Femme 60 ans	0,84%	0,76%	0,70%	0,64%	0,88%	0,78%	0,70%	0,63%
Femme 70 ans	1,58%	1,50%	1,42%	1,35%	1,60%	1,50%	1,40%	1,32%
Femme 80 ans	2,95%	2,88%	2,82%	2,76%	3,16%	3,07%	2,98%	2,90%
Femme 90 ans	4,48%	4,41%	4,33%	4,26%	5,43%	5,33%	5,23%	5,14%

	Surcoût de la réversion [(2)-(1)]/(1)			
	$j=3\%$	$j=4\%$	$j=5\%$	$j=6\%$
Homme 60 ans	+ 159%	+ 192%	+ 234%	+ 293%
Homme 70 ans	+ 152%	+ 175%	+ 204%	+ 238%
Homme 80 ans	+ 69%	+ 74%	+ 78%	+ 82%
Homme 90 ans	+ 7%	+ 8%	+ 9%	+ 9%
Femme 60 ans	+ 4%	+ 3%	+ 1%	-1%
Femme 70 ans	+ 2%	+ 0%	-1%	-3%
Femme 80 ans	+ 7%	+ 6%	+ 6%	+ 5%
Femme 90 ans	+ 21%	+ 21%	+ 21%	+ 21%

Ces calculs vérifient bien ce que nous pressentions, la réversion a une influence sur le prix et l'augmente. Les résultats de ces calculs nous montrent que si l'impact de la réversion est pratiquement insignifiant pour les femmes, il est par contre très important pour les hommes en particulier avant 80 ans.

On observe là encore à quel point la composition du portefeuille est importante dans la détermination du prix de réassurance et comment les « bons » risques, comme les hommes de moins de 80 ans, peuvent être aggravés par l'ajout d'une réversion sur un conjoint de sexe opposé.

III.3.e Impact de la revalorisation

Voyons maintenant l'influence de la revalorisation sur le prix de la réassurance. Il faut également préciser que s'il y a revalorisation, le taux de réassurance sera alors appliqué sur les provisions mathématiques de début d'année augmentées de la provision pour revalorisation.

	Surcoût induit par la revalorisation sur β							
	Revalorisation 1%				Revalorisation 2%			
	$j=3\%$	$j=4\%$	$j=5\%$	$j=6\%$	$j=3\%$	$j=4\%$	$j=5\%$	$j=6\%$
Homme 60 ans	+ 27%	+ 29%	+ 32%	+ 35%	+ 60%	+ 64%	+ 70%	+ 77%
Homme 70 ans	+ 18%	+ 19%	+ 20%	+ 21%	+ 38%	+ 40%	+ 42%	+ 45%
Homme 80 ans	+ 6%	+ 6%	+ 6%	+ 5%	+ 12%	+ 12%	+ 12%	+ 11%
Homme 90 ans	+ 2%	+ 2%	+ 2%	+ 2%	+ 4%	+ 4%	+ 4%	+ 4%
Femme 60 ans	+ 9%	+ 9%	+ 9%	+ 9%	+ 20%	+ 19%	+ 19%	+ 18%
Femme 70 ans	+ 5%	+ 4%	+ 4%	+ 4%	+ 9%	+ 9%	+ 9%	+ 9%
Femme 80 ans	+ 1%	+ 1%	+ 1%	+ 1%	+ 3%	+ 3%	+ 3%	+ 3%
Femme 90 ans	+ 1%	+ 1%	+ 1%	+ 1%	+ 2%	+ 2%	+ 2%	+ 1%

Nous savons quel effet de levier a la revalorisation des rentes sur les pertes techniques de l'assureur, il est bien évidemment le même sur le prix de la réassurance.

Comme nous l'avons vu lors de l'étude de l'impact du taux de rendement sur le prix de la couverture de réassurance, l'augmentation du taux de rendement diminue le surcoût de la revalorisation, mais ceci n'est pas forcément toujours valable. Car si le poids de la revalorisation augmente avec le temps, l'actualisation atténue ce poids sur les flux les plus éloignés dans le temps et donne alors plus de poids aux flux les plus proches dans le temps. Si ces premiers flux sont positifs, l'effet sur le prix peut alors être inversé. Les soldes techniques des hommes âgés de moins de 80 ans étant positifs, le surcoût induit par la revalorisation augmentera avec une augmentation du taux de rendement du réassureur.

Bien évidemment, vu la différence de prix qu'entraîne la revalorisation des montants de rente, le traité de réassurance devra bien préciser si la couverture se fait sur les montants de rente avec ou sans revalorisation. Le réassureur pourra d'ailleurs, vu l'impact, décider de limiter celle-ci à un maximum annuel.

Nous sommes jusqu'à présent parti du principe que le réassureur ne participait pas au risque financier de l'assureur, mais en acceptant de couvrir les rentes revalorisées, il prend un risque financier de second ordre non négligeable par le biais de la revalorisation et par les hypothèses d'estimation prises sur celle-ci.

III.3.f Impact pour le réassureur d'une sous-mortalité par rapport à ses bases

Nous venons de voir que plusieurs éléments sont à prendre en compte par le réassureur lors de sa cotation.

Et un élément primordial est bien sûr le choix des tables de mortalité. En effet, si le réassureur a vu juste et a bien estimé la mortalité future par le choix de ses tables de mortalité, le taux pur de réassurance devra suffire pour faire face aux paiements des soldes techniques.

En fait les calculs nous montrent que l'impact d'1% sur la mortalité n'a pas un impact de 1% sur le tarif mais généralement plus. Néanmoins comparé à l'impact du taux de rendement choisi par le réassureur ou du taux de revalorisation, l'impact d'une sous-mortalité est d'effet moindre.

III.3.g Avantages et inconvénients de cette couverture

Pour l'assureur, la couverture en Stop-Loss jusqu'à extinction de son portefeuille et en couverture illimitée est une couverture idéale qui lui permet de céder l'intégralité du risque de longévité au réassureur. Bien sûr le prix pourra en être relativement élevé mais il a l'avantage d'être fixe dans le temps et pourra être entièrement financé par ses produits financiers.

De plus, cette couverture peut être aménagée selon les besoins de l'assureur. En effet, l'intégralité du solde technique peut être couverte en comprenant ou non la revalorisation, mais la franchise peut également être exprimée comme un niveau de sous-mortalité par rapport aux tables de références ou même comme un montant de perte maximum.

L'avantage du taux fixe lui permet en outre d'offrir à ses assurés une revalorisation plus stable puisque qu'avec cette couverture le solde technique est neutralisé et que seuls entrent en jeu les revenus financiers réduits de la prime de réassurance. Elle permet donc le lissage des pertes que l'assureur ne peut mettre en place seul.

Par contre, cette couverture ne peut être mise en place que sur un portefeuille fermé et d'un volume suffisamment important pour pouvoir être accepté par le réassureur.

En effet, pour le réassureur cette couverture est extrêmement délicate. Elle l'engage sur un risque difficile à appréhender dont les incertitudes sont nombreuses en particulier sur des durées aussi longue. Durée qui ajoute non seulement des difficultés pour les hypothèses de mortalité mais aussi comme nous l'avons vu pour le choix du taux de rendement. L'engagement sur le taux fixe peut avoir pour le réassureur des conséquences désastreuses sans aucun moyen pour lui de se rattraper.

Néanmoins cette couverture n'est réellement intéressante que dans une optique de long terme permettant un lissage des pertes optimum.

On comprendra donc que le réassureur soit frileux face à cette couverture et exige de la part de l'assureur un certain nombre d'éléments comme un volume de portefeuille minimum d'une composition la plus idéale possible et une bonne connaissance de la sinistralité passée de ce portefeuille afin d'avoir la meilleure approche du risque possible.

III.4. Couverture par un excédent de durée

III.4.a Principe de la couverture

Il s'agit là encore d'une couverture de réassurance non proportionnelle. Cette fois-ci la franchise est exprimée en durée et est appliquée sur chaque assuré (tête par tête). Le réassureur intervient une fois une certaine durée écoulée. On peut imaginer plusieurs variantes : la durée peut être calculée par rapport à un âge, le réassureur intervenant dès que l'assuré atteint l'âge X . Si l'assuré est âgé de x années, la durée sera alors de $X - x$, cet âge peut par exemple être l'espérance de vie attendue au moment de la signature du contrat ou l'espérance de vie $+t$ années. Dans ce cas de figure, la franchise sera différente par assuré, mais la durée peut aussi être fixe et identique pour chaque assuré.

Ensuite l'intervention du réassureur peut se faire de deux façons : soit, une fois la durée de la franchise écoulée, le réassureur assure à l'assureur le paiement des arrérages jusqu'au décès de l'assuré, soit il verse à l'assureur le capital constitutif de rente nécessaire à ce moment là suivant des bases techniques convenues à l'avance.

Pour la première solution, le réassureur prend intégralement le risque de longévité dès la franchise écoulée et c'est là un vrai risque de pointe.

Pour la deuxième solution, soit l'assuré décède prématurément auquel cas l'assureur conserve la partie du capital constitutif non utilisé, soit l'assuré vit au-delà de ce qui était prévu et à ce moment là le capital constitutif devient insuffisant pour le règlement de la rente. Cette solution laisse donc une partie du risque de longévité à la charge de l'assureur, mais est bien évidemment moins chère que la première.

Cette couverture demande là aussi une collaboration et un engagement du réassureur pluriannuel.

III.4.b Calcul du prix de la couverture

Cette couverture peut tout à fait être comparée à l'achat par l'assureur au réassureur d'une rente viagère différée de la franchise.

On pourra imaginer plusieurs possibilités de couvertures et de paiement des primes de réassurance. Comme nous l'avons déjà énoncé, le réassureur, une fois la franchise écoulee, pourra payer à l'assureur, le capital constitutif de rente ou les arrérages. La prime de réassurance, elle, pourra être payée sous forme d'une prime unique ou sous la forme d'une prime viagère pendant la durée de la franchise.

Si on reprend les notations précédentes avec (R) les bases techniques du réassureur et (A) celles de l'assureur, on a :

1^{ère} possibilité : la franchise écoulee, le réassureur paie le capital constitutif

Si la prime de réassurance est payée sous la forme d'une prime unique, le calcul pour un assuré sera alors :

$$\Pi = {}_n p_x^{(R)} \cdot (1+j)^{-n} \cdot \sum_{k=1}^{\omega-x-n} p_{x+n+k}^{(A)} \cdot (1+i)^{-k} \text{ avec } n \text{ la durée de la franchise.}$$

Si la prime de réassurance est payée sous la forme d'une prime viagère P , nous aurons :

$$P = \frac{{}_n p_x^{(R)} \cdot (1+j)^{-n} \cdot \sum_{k=1}^{\omega-x-n} p_{x+n+k}^{(A)} \cdot (1+i)^{-k}}{\sum_{k=0}^{n-x-1} p_{x+k}^{(R)} \cdot (1+j)^{-k}}.$$

2^{ème} possibilité : la franchise écoulee, le réassureur paie les arrérages

Si la prime de réassurance est payée sous la forme d'une prime unique, nous aurons alors :

$$\Pi = {}_n p_x^{(R)} \cdot (1+j)^{-n} \cdot \sum_{k=1}^{\omega-x-n} p_{x+n+k}^{(R)} \cdot (1+i)^{-k}.$$

Si la prime de réassurance est payée sous la forme d'une prime viagère P , nous aurons :

$$P = \frac{{}_n p_x^{(R)} \cdot (1+j)^{-n} \cdot \sum_{k=1}^{\omega-x-n} p_{x+n+k}^{(R)} \cdot (1+i)^{-k}}{\sum_{k=0}^{n-x-1} p_{x+k}^{(R)} \cdot (1+j)^{-k}}$$

Une fois la formule choisie, il suffira d'appliquer ces calculs sur chaque assuré du portefeuille et d'en faire la somme pour obtenir la prime globale pure de réassurance. Ces primes pourront également être rapportées aux provisions mathématiques afin d'obtenir un taux de prime pure comme pour la couverture en Stop-Loss.

III.4.c Application pratique

Si nous prenons par exemple un excédent de durée avec une franchise de l'espérance de vie attendue avec les tables TPG93, pour une rente viagère de 1 000 € payables annuellement à termes échus et un taux technique de 3%, sachant que le réassureur prend également un taux de rendement de 3%, nous obtenons les prix en € suivant :

j = 3%	Durée	1 ^{ère} possibilité (1)		2 ^{ème} possibilité (2)		[(2)-(1)]/(1)
		Π	P	Π	P	
Homme 60 ans	27	1 595	98	2 041	126	+ 28%
Homme 70 ans	18	1 613	143	2 041	180	+ 27%
Homme 80 ans	10	1 522	236	1 927	299	+ 27%
Homme 90 ans	5	979	316	1 333	431	+ 36%
Femme 60 ans	27	1 981	115	2 442	141	+ 23%
Femme 70 ans	18	2 030	164	2 476	200	+ 22%
Femme 80 ans	10	1 792	256	2 149	307	+ 20%
Femme 90 ans	5	976	313	1 173	376	+ 20%

Pour cette couverture, le choix entre le paiement du capital constitutif ou le paiement de la rente n'est pas sans conséquence sur le prix. Précisons que, pour notre exemple, en cas de paiement du capital constitutif, celui-ci est calculé d'après les bases de l'assureur, c'est à dire les tables TPG93.

En effet, dans le premier cas, le réassureur ne fait finalement payer la sous-mortalité attendue que pendant la durée de la franchise, alors que dans le deuxième cas, il en tient compte pendant toute la durée du contrat.

Cette différence de prix n'est en fait que le reflet de la différence de prise de risque par le réassureur.

Bien évidemment, là encore le taux de rendement du réassureur aura une influence non négligeable sur le prix de la couverture. Les différences de prix seront tout à fait semblable aux différences que nous avons trouvé auparavant sur la couverture Stop-Loss. Nous ne reviendrons donc pas sur des éléments tels que le taux de rendement, de revalorisation ou de réversion puisque les impacts de ces différents éléments sur le prix de

la couverture de réassurance seront tout à fait comparables à ceux trouvés auparavant sur la couverture en Stop-Loss.

Notons tout de même que des éléments tels que la revalorisation ou la réversion seront très difficiles à inclure dans la couverture.

En effet, pour pouvoir inclure la revalorisation, l'assureur devra indiquer à quel niveau il souhaite être couvert et le réassureur fera alors ces calculs sur la base d'une rente différée indexée sur le taux de revalorisation souhaité. L'assureur pourra également reprendre chaque année une couverture pour le surplus d'arrérage dû à la revalorisation, mais ceci implique une gestion extrêmement lourde.

Pour pouvoir couvrir les rentes avec possibilité de réversion sur un conjoint par un excédent de durée, le problème sera nettement plus délicat. En effet, sur quelle tête appliquer la franchise ? Il faudra donc définir précisément si la franchise sera appliquée au global du contrat, auquel cas le paiement se fera si au moins une des deux têtes est vivante une fois la durée de la franchise écoulee. La franchise pourra également être appliquée sur chacune des deux têtes, sachant que le conjoint pourra éventuellement avoir déjà dépassé cette franchise au décès de l'assuré principal.

III.4.d Avantages et inconvénients de cette couverture

Comme pour la couverture en Stop-Loss, l'excédent de durée répond parfaitement à la préoccupation de l'assureur face au risque de longévité.

Cette couverture permet à l'assureur de céder uniquement les risques de pointe à la hauteur qui lui convient. Le prix de la couverture pourra éventuellement être exprimé en fonction des provisions mathématiques de façon à pouvoir être financé par les produits financiers de l'assureur s'il opte pour une prime lissée.

L'excédent de durée a aussi l'avantage de pouvoir être appliqué aussi bien pour une nouvelle production de produits que pour des rentes en cours.

Par contre, la gestion de cette couverture sera lourde et certainement difficile à mettre en place en cas de rente avec réversion et/ou revalorisée.

Pour le réassureur, c'est également une couverture extrêmement délicate qu'il sera certainement peu enclin à offrir si ce n'est au prix fort. C'est là encore un engagement de longue durée sur un risque en constante évolution.

Le réassureur devra veiller à asseoir ses cotations sur des bases techniques solides. Pour éviter des pertes trop importantes, il pourra éventuellement ajouter à la couverture une notion de portée, c'est à dire limiter son paiement à une certaine durée, laissant à nouveau le risque à l'assureur après cette durée écoulee.

III.5. Pool de réassurance des rentes viagères

III.5.a Principes de la couverture

Toutes les solutions de réassurance que nous avons abordées jusqu'à présent avaient pour but de couvrir la déviation de mortalité.

Mais qu'il y ait déviation de mortalité ou pas, un autre risque existe, c'est le risque intrinsèque dû à une mutualisation impossible du fait de la petite taille d'un portefeuille.

En effet sur un petit portefeuille les résultats techniques annuels de chaque assuré vont mal se compenser entre eux, un décès va soudainement générer des résultats positifs et le non-

décès d'un assuré peut générer des pertes qui ne seront pas compensées par les gains alors même qu'au final il se peut qu'il n'y ait eu ni surmortalité ni sous-mortalité.

Bien évidemment ce risque est accentué si les assurés ont des âges ainsi que des montants de rentes très différents. Un assureur qui souhaite se couvrir uniquement contre ce risque, souhaite en fait lisser ses résultats dans le temps.

L'assureur peut alors opter pour un Stop-Loss annuel mais il peut aussi opter pour la mutualisation de son portefeuille avec d'autres portefeuilles par le biais d'un pool de réassurance.

Le but du pool est de mutualiser ensemble des portefeuilles de rentiers dont la taille insuffisante rend l'équilibre problématique pour l'assureur.

C'est le cas des portefeuilles pour les compagnies dont cette activité est marginale, mais qui pour des raisons commerciales a du accepter quelques rentes. C'est également le cas, au moins temporairement, des portefeuilles lors du lancement d'un nouveau produit. Il faudra en effet un certain temps avant que le volume soit suffisant et qu'une mutualisation soit possible.

De plus, la taille des petits portefeuilles rend leur expérience inexploitable pour la tarification et ne permet pas de leur appliquer la loi des grands nombres.

Réunir ensemble plusieurs portefeuilles devrait donc permettre de « gommer » tous ces aspects négatifs.

III.5.b Le fonctionnement

Le pool fonctionne de la façon suivante : en début d'année, chaque compagnie apporte son portefeuille dans le pool.

En fin d'année, on calcule le solde technique global du pool, puis chaque compagnie en reçoit une part.

Si le principe paraît simple, l'application en est délicate. En effet, chaque assureur doit-il verser ses provisions mathématiques dans le pool ou doit-il uniquement payer une prime pour être couvert ? Et comment calculer ensuite la part du résultat qui revient à chacun ?

La première idée qui vient à l'esprit est de calculer la part de chacun en fonction de ses provisions mathématiques. Chaque assureur apporterait alors ses provisions mathématiques de début d'année au pool, celles-ci serviraient à payer les arrérages de l'année et à constituer les provisions mathématiques de fin d'année. Le solde technique du pool qu'il soit positif ou négatif serait alors redistribué à chaque assureur en fonction de sa part de provisions mathématiques par rapport au total des provisions mathématiques du pool.

Mais cette solution ne permet pas un partage équitable. En effet, comparons deux assureurs, l'un apportant dans le pool un portefeuille d'assurés relativement jeune et l'autre un portefeuille du même volume de provisions mathématiques mais constitué d'assurés plus âgés. Ils auront donc la même part dans le pool et récupéreront à la fin de l'année la même part de gains ou de pertes.

Or le potentiel de gain ou de perte du premier assureur n'est pas du tout équivalent à celui du deuxième, en effet la volatilité de son risque est beaucoup plus faible. Si un de ses

assurés ne décède pas, la perte enregistrée comparée aux provisions mathématiques mise en face est minime, alors que c'est l'inverse pour le deuxième assureur. En fait le deuxième assureur apporte un portefeuille « plus risqué » que le premier.

De plus, le pool doit également tenir compte du fait qu'éventuellement tous les portefeuilles ne seront pas provisionnés sur les mêmes bases techniques.

Le partage des résultats du pool doit donc tenir compte de la taille de chaque portefeuille, de sa composition (age, sexe) et des bases techniques d'origine (sous condition d'acceptation du Pool).

Finalement cela revient à dire que le partage des résultats du pool doit tenir compte du potentiel de gain ou de perte de chaque portefeuille pour pouvoir être équitable.

Essayons d'analyser ce « potentiel » de plus près :

En début d'année, la valeur attendue du résultat technique, pour une rente payée à termes échus à un assuré d'âge x , selon une table de mortalité et un taux d'intérêt technique choisis, est :

$$ST^{Théorique} = R.(a_x(1+i) - p_x - p_x.a_{x+1}).$$

En fin d'année, le résultat technique devient

$$ST^{Réel} = R.(a_x(1+i) - 1 - a_{x+1}), \text{ si l'assuré a survécu,}$$

$$ST^{Réel} = R.a_x(1+i), \text{ si l'assuré est décédé.}$$

L'espérance de la perte annuelle est donc $R.(a_x(1+i) - 1 - a_{x+1})$ avec une probabilité p_x et l'espérance du gain annuel de $R.a_x(1+i)$ avec une probabilité de q_x .

On a donc :

$$\begin{aligned} E(\text{perte annuelle}) &= p_x.R.(a_x(1+i) - 1 - a_{x+1}) \\ &= R. \left(p_x.a_x(1+i) - \underbrace{p_x - p_x.a_{x+1} + a_x(1+i) - a_x(1+i)}_{ST^{Théorique}=0} \right) \\ &= -R.a_x.(1+i).q_x \\ &= -E(\text{gain annuel}) \end{aligned}$$

L'espérance de perte annuelle et l'espérance de gain annuel sont donc égales en valeur absolue.

Si on note

P = nombre de portefeuilles

N = nombre de contrats d'un portefeuille

i = taux d'intérêt technique

à l'échelle d'un portefeuille, le gain moyen annuel attendu est

$$E_{Ptf}(\text{gain annuel}) = \sum_{n=1}^N R_n \cdot a_{x_n} \cdot (1+i_n) \cdot q_{x_n} .$$

Ainsi la part de chaque portefeuille sera faite en fonction de son espérance de gain (ou perte) annuel par rapport à l'espérance de gain (ou de perte) annuel du pool.

L'espérance de gain annuel du pool n'étant en fait que la somme des espérances de gain annuel de chaque portefeuille, c'est à dire :

$$E_{Pool}(\text{gain annuel}) = \sum_{p=1}^P \sum_{n=1}^N R_{p,n} \cdot a_{x_{p,n}}^{table_p} \cdot (1+i_{p,n}) \cdot q_{x_{p,n}}^{table_p} .$$

La part de chaque portefeuille dans le pool sera donc :

$$Part_{Ptf_k} = \frac{\sum_{n=1}^N R_{k,n} \cdot a_{x_{k,n}}^{table_k} \cdot (1+i_j) \cdot q_{x_{k,n}}^{table_k}}{\sum_{p=1}^P \sum_{n=1}^N R_{p,n} \cdot a_{x_{p,n}}^{table_p} \cdot (1+i_{p,n}) \cdot q_{x_{p,n}}^{table_p}} .$$

C'est sur cette base que pourra se faire le partage du solde technique du pool en fin d'année, le solde technique du pool étant la somme des soldes techniques de chaque portefeuille :

$$ST_{Pool} = \sum_{p=1}^P ST_{Ptf_p} .$$

Les soldes techniques seront calculés par l'une ou l'autre méthode vu auparavant. Après partage le solde technique de chaque portefeuille devient alors :

$$ST_{Ptf_k} = \frac{\sum_{n=1}^N R_{k,n} \cdot a_{x_{k,n}}^{table_k} \cdot (1+i_j) \cdot q_{x_{k,n}}^{table_k}}{\sum_{p=1}^P \sum_{n=1}^N R_{p,n} \cdot a_{x_{p,n}}^{table_p} \cdot (1+i_{p,n}) \cdot q_{x_{p,n}}^{table_p}} \cdot \sum_{p=1}^P ST_{Ptf_p} .$$

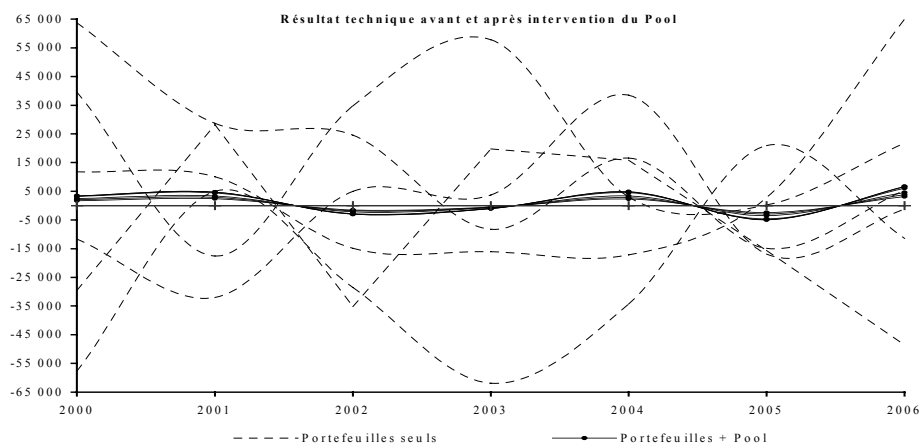
III.5.c Simulations

Voyons maintenant les résultats que l'on obtiendrait par le biais du pool. Nous avons simulé les soldes techniques de six portefeuilles pris individuellement, puis mutualisés par le pool.

Pour chaque portefeuille la mortalité est projetée avec les tables TPG93 à 100%, chaque assuré touchant une rente payable annuellement à termes échus calculée avec un taux technique de 3%.

La composition de chaque portefeuille est la suivante :

	Nbre d'assurés	Age moyen	Rente moyenne
Portefeuille 1	400	58 ans	1 000 €
Portefeuille 2	380	58 ans	1 250 €
Portefeuille 3	350	60 ans	1 500 €
Portefeuille 4	390	60 ans	1 750 €
Portefeuille 5	360	62 ans	1 750 €
Portefeuille 6	380	62 ans	1 750 €



Cette simulation a été faite sur plusieurs années. Pour simplifier les calculs, nous avons considéré les portefeuilles comme fermés, mais en pratique rien n'empêche d'avoir de nouvelles générations chaque année.

Les résultats obtenus montre un fort lissage des résultats. Evidement plus le nombre de portefeuilles est grand plus la mutualisation peut avoir l'impact attendu.

Ici, nous nous sommes limités à six portefeuilles, mais en pratique, il serait préférable d'en avoir plus afin d'avoir une mutualisation et donc un lissage des résultats optimum.

Ce graphe nous montre aussi de façon flagrante, la grande volatilité des résultats qu'il peut y avoir sur de petits portefeuilles, alors même qu'aucune sous-mortalité ou surmortalité n'a été projetée.

Mais pour que la mutualisation ait l'effet escompté il faut non seulement réunir le plus de portefeuilles possibles, mais il faut aussi que les portefeuilles soient le plus semblable possible, que se soit en terme d'âge, de niveau de rente ou de mortalité.

Des simulations faites avec des portefeuilles différents (même uniquement en terme d'âge) montrent en effet que la mutualisation ne peut plus être aussi efficace. Les portefeuilles les plus proches entre eux de par leur composition vont se compenser entre eux mais sans avoir réellement d'impact sur les autres.

Ce phénomène est encore plus flagrant lorsqu'on mélange des portefeuilles avec très peu de points communs. La mutualisation devient pratiquement impossible.

III.5.d Les conditions indispensables au bon fonctionnement du Pool

Nous venons de voir que le fonctionnement et en particulier le partage du résultat technique du Pool est basé uniquement sur un potentiel théorique. Il est donc très sensible aux bases techniques choisies par chaque assureur sur son portefeuille. Pour que le partage soit réellement équitable, il est donc impératif que les bases choisies soit le reflet le plus proche possible de la mortalité réelle de chaque portefeuille. Si cet élément n'était pas respecté, le Pool ne servirait qu'à mutualiser des effets de sous ou sur-provisionnement, ce qui n'est pas son but.

C'est pourquoi, le Pool devra valider au départ les bases techniques de chaque portefeuille. S'il s'avère que les bases techniques choisies ne sont pas appropriées, le Pool en proposera d'autres et effectuera ses calculs d'après ces nouvelles bases.

Faute d'expérience exploitable, ce choix se fera sur des éléments qualitatifs comme l'âge moyen du portefeuille, la répartition homme/femme, le mode de vente de rentes (obligatoire, facultatif), le type de rente (viagère, temporaire), le niveau de rente.

Le portefeuille dont les bases techniques ne seront pas acceptées, devra donc assumer seul la différence entre ses bases techniques et celles choisies pour lui par le Pool. Dans ce système, le rôle du réassureur peut se limiter à la gestion du pool sans prise de risque de sa part, ou s'élargir en offrant une couverture proportionnelle ou non-proportionnelle pour protéger le pool.

III.5.e Avantages et inconvénients de cette couverture

Cette couverture est intéressante par le lissage des résultats qu'elle apporte à de petits portefeuilles dont la volatilité des résultats est très importante.

Elle nécessite néanmoins un engagement de longue durée de la part des assureurs et l'acceptation de partager des bénéfices certaines années contre des pertes d'autres années.

De plus pour être efficace, le pool doit réunir le plus de portefeuilles possible avec des caractéristiques les plus proches.

Il faut également être conscient que le pool n'apporte qu'une couverture contre la volatilité du risque et ne doit être considéré comme une couverture permettant de couvrir le risque de longévité.

CONCLUSION

Les Français vivent en moyenne plus longtemps que l'ensemble des européens, avec, pour 2000, une espérance de vie à la naissance estimée à 75,2 pour les hommes et 82,7 pour les femmes. En 1999, l'espérance de vie dans l'Union est estimée à 74,6 ans pour les hommes et 80,9 pour les femmes. Les Français se placent ainsi loin devant les Portugais, Irlandais, Finlandais et Luxembourgeois, qui ont une espérance de vie à la naissance inférieure à 74 ans. Et les Françaises sont parmi les européennes à la plus forte longévité, avec les Espagnoles (82,5 ans). Avec la baisse de la mortalité, les centenaires sont de plus en plus nombreux. Environ 9000 personnes auraient ainsi traversé le vingtième siècle dans sa totalité. On estime qu'ils n'étaient qu'une centaine au 1^{er} janvier 1901 à être nés au 18^{ème} siècle^{###}.

Source INSEE – Bilan démographique de l'an 2000.

Ces évolutions démographiques observées dans les pays industrialisés ont suscité de nombreux débats sur l'avenir de la prévoyance vieillesse.

Tout le monde semble d'accord pour prévoir une diminution inéluctable des prestations des régimes de retraite par répartition, diminution entraînant un développement important des régimes complémentaires par capitalisation et provoquant un renforcement nécessaire de l'initiative privée en matière d'épargne.

En Europe, les fonds de pension sont déjà développés au Royaume-Uni, en Suisse, en Belgique et aux pays-Bas. D'autres pays, où les régimes publics étaient jusqu'alors relativement plus généreux, comme l'Italie, l'Allemagne et la France réfléchissent activement à la mise en place de régimes de retraite complémentaires.

Les compagnies d'assurance vont donc certainement devoir faire face à une demande de plus en plus importante de produits viagers. En France, elles semblent malheureusement mal armées. Si l'homologation des tables de générations prospectives a été un réel progrès en matière d'analyse de la mortalité, il n'en reste pas moins de nombreuses lacunes. En effet, ces tables n'ont pas été remises à jour depuis 1993 et le fait qu'elles aient été construites sur la population féminine ne suffit pas toujours à mettre les assureurs à l'abri d'une sous-tarification du risque. Les tables de mortalité de marché choisies pour notre étude montrent d'ailleurs des différences significatives entre une mortalité de population et une mortalité de rentiers. Cette analyse nous montre aussi un intérêt indéniable à utiliser des tables de mortalité différenciées par sexe, ce que les tables légales françaises ne prévoient pas.

De plus, les compagnies d'assurance sont soumises à une réglementation très stricte qui pourrait dans certains cas aller à l'encontre du principe de prudence et de protection des assurés qui régit l'assurance.

Dépourvues d'outils efficaces pour faire face à une sous-mortalité, les compagnies peuvent alors se tourner vers la réassurance.

Consciente de l'importance du risque de longévité et devant les demandes grandissantes des compagnies, les réassureurs commencent à étudier de plus près ce risque, à élaborer des solutions et à proposer des montages de réassurance. Mais la prudence est de rigueur et les réassureurs prêts à s'engager sur ce risque aujourd'hui sont bien conscients qu'ils risquent d'en payer le prix fort dans quelques années.

Ne serait-il pas temps d'engager une réflexion commune entre tous les acteurs du marché afin d'assouplir la réglementation et d'offrir, à l'instar de certains de nos voisins européens, les moyens de construire des tables de mortalité de marché ? C'est en tous cas dans cette voie que s'est engagé la Direction des Assurances de Personnes en constituant en l'an 2000 un groupe de travail sur les rentes viagères.

BIBLIOGRAPHIE

J.J. DROESBEKE, B. FICHET, P. TASSI - Analyse statistique des durées de vie. Modélisation des données censurées - Economica 1989 – Association pour la statistique et ses utilisations

C. HILL, C. COM-NOUGUE, A. KRAMAR, T. MOREAU, J. O'QUIGLEY, R. SENOUSI, C. CHASTANG - Analyse Statistique des données de survie - INSERM Médecine-Sciences - Flammarion 1990 – Collection statistique en biologie et en médecine

J.P. KLEIN, M.L. MOESCHBERGER - Survival Analysis - Techniques for censored and truncated Data - Springer 1997 – Statistics for biology and health

D.G. KLEINBAUM - Survival Analysis - A self-learning text - Springer 1997 - Statistics in the health sciences

Pierre PETAUTON - Théorie et pratique de l'assurance vie – Dunod 1996

Sophie TERRIER - Mémoire d'Actuariat CNAM 2001